

# Le processus $\alpha$ -stable pour l'estimation Bayésienne non paramétrique des images dans le domaine des Ondelettes

L. Boubchir<sup>†</sup>, J. M. Fadili et D. Bloyet

Image Processing Group,  
Case 123, 4 place Jussieu, 75252 PARIS Cedex 05  
GREYC CNRS UMR 6072 ENSICAEN 6, Bd du Maréchal Juin, 14050 Caen, France  
Phone : +33 (0)2 31 45 29 20, Fax : +33 (0)2 31 45 26 98  
<sup>†</sup> Email Larbi.Boubchir@greyc.ismra.fr

**Mots Clés** : Contexte Bayésien, Transformée en Ondelettes,  $\alpha$ -stable, Modèle de mélange de gaussiennes, Espérance conditionnelle *a posteriori*.

Dans cet article, un nouvel estimateur Bayésien non linéaire non paramétrique formulé dans le cadre de la transformée en ondelettes est présenté. Dans cette approche, nous proposons un modèle statistique *a priori* adapté à la modélisation des coefficients d'ondelettes d'une image bruitée. Il s'agit du modèle  $\alpha$ -stable. Du fait du caractère creux de la transformée en ondelettes, la plupart des coefficients de détails de l'image bruitée sont nuls et seuls quelques uns sont significatifs. Ainsi, la répartition de ces coefficients est caractérisée par une densité centrée en zéro avec des queues relevées. C'est exactement cette propriété qui est révélée par la densité de probabilité  $\alpha$ -stable symétrique.

Ensuite, nous appliquons la règle de Bayes pour combiner l'information contenue dans les données d'observation (image bruitée) et celle contenue dans la loi *a priori* afin d'obtenir l'expression analytique de la distribution marginale *a posteriori*. Cette dernière permet de réaliser notre estimateur Bayésien et d'estimer l'image.

Enfin, Les résultats expérimentaux ont montré la performance de notre débruiteur Bayésien comparé aux autres débruiteurs développés dans un contexte Bayésien et classique.

## 1 Introduction

La régression non paramétrique a constitué un outil fondamental au cours des vingt dernières années dans le domaine du traitement du signal, et est toujours un domaine d'extension de recherche continue. L'objectif consiste à recouvrer une fonction inconnue  $g$ , corrompue par du bruit sans spécification d'un modèle explicite (linéaire ou non) sur la fonction à retrouver. Les techniques de régression non paramétrique (ou débruitage) offrent un panel d'outils simples d'emploi permettant de récupérer une structure, sans imposer un modèle paramétrique au préalable.

Durant les années 90, le domaine de la régression non paramétrique a été dominé par deux types d'estimateurs non linéaires introduits par Donoho & Johnstone [1,2] et Donoho, Johnstone, Kerkycharian & Picard [3], à savoir le "wavelet shrinkage" et le "wavelet thresholding". Ces estimateurs sont facilement mis en application par des algorithmes rapides ainsi ils sont très attrayants dans les situations pratiques [4].

Depuis la parution des articles fondateurs par Donoho & Johnstone [1-3], la littérature de traitement d'image a connu une proposition de papiers appliquant ou proposant des modifications de l'algorithme original dans des problèmes d'estimation et/ou restauration d'image. Différentes alternatives au 'wavelet thresholding' ont été développées [2, 5-10].

Différentes approches opérant dans un contexte Bayésien ont été récemment envisagées en vue de la réalisation d'estimateurs de type seuillage d'ondelettes. Ces différents estimateurs s'avèrent plus efficaces que ceux cités précédemment. Dans le cadre d'une approche Bayésienne, on suppose que la distribution des coefficients d'ondelettes est connue *a priori*. Le choix d'une fonction de coût conditionne l'obtention d'un type d'estimateur Bayésien. Il est à noter que du fait de l'intérêt croissant porté à la régression non paramétrique non linéaire, l'applicabilité de ces estimateurs à des échantillons de tailles limitées les rend incontournables actuellement.

Dans le cadre d'un paradigme Bayésien, on suppose que la distribution des coefficients d'ondelettes est connue *a priori*. Le choix d'une fonction de coût conditionne l'obtention d'une règle d'estimation Bayésienne. Différentes approches opérant dans un contexte Bayésien ont été récemment envisagées en vue de la réalisation d'estimateurs dans le domaine des ondelettes, citons par exemple [11-14]. Ces différents estimateurs s'avèrent plus efficaces que ceux cités précédemment [15]. Un choix simple est l'*a priori* gaussien [16] ou encore un mélange d'une distribution gaussienne et d'une Dirac centrée en zéro [17, 18]. Dans [19], les auteurs ont proposé une densité exponentielle symétrique et une Dirac centrée en zéro. Leur choix fut motivé par un *a priori* exponentiel sur la variance. Mallat [4] a été le premier à proposer les distributions gaussiennes généralisées (DGG). Elles sont très communément adoptées comme *a priori* pour des fins d'estimation et de compression dans le domaine des ondelettes, [12, 13]. Cependant, à cause sa décroissance exponentielle rapide, l'*a priori* DGG se réèle incapable de modéliser correctement les queues de distribution relevées, comportement typique des distributions des coefficients d'ondelettes. [14] ont proposé la mise en oeuvre d'un *a priori* basé sur les lois  $\alpha$ -stables [20]. Cependant, leur estimateur des hyperparamètres

restaient extrêmement pauvre particulièrement en présence de bruit. Ceci a été mis en évidence dans des travaux antérieurs [21, 22]. De plus, aussi bien pour l'*a priori* DGG que  $\alpha$ -stable, mais aussi pour bon nombre d'*a priori* dans la littérature, aucune forme analytique n'a été proposée pour l'estimateur Bayésien. Ce qui nécessite une implémentation numérique des intégrales, impliquées dans les estimateurs, particulièrement instable (notamment à cause des bornes d'intégration infinies) et coûteuse en temps.

Dans cet article, nous proposons un modèle statistique *a priori* adapté à la modélisation des coefficients d'ondelettes d'une image. Il s'agit du modèle  $\alpha$ -stable. Du fait du caractère creux de la transformée en ondelettes, la plupart des coefficients de détails de l'image bruitée sont nuls et seuls quelques uns sont significatifs. Ainsi, la répartition de ces coefficients est caractérisée par une densité centrée en zéro avec des queues relevées. C'est exactement cette propriété qui est révélée par la densité de probabilité  $\alpha$ -stable symétrique, où les formes explicites des fonctions de densité de probabilité (PDF) ne sont pas connues en général. Alors, nous proposons une méthode rapide et numériquement très stable, basée sur le modèle de mélange d'échelle de gaussiennes, pour obtenir une approximation analytique pour la classe des PDFs  $\alpha$ -stables. Ensuite, nous appliquons la règle de Bayes pour combiner l'information contenue dans les données d'observation (image bruitée) et celle contenue dans la loi *a priori* afin d'obtenir l'expression analytique de la distribution marginale *a posteriori*. Cette dernière permet une implémentation simple et rapide de notre estimateur Bayésien.

Enfin, nous nous sommes attachés à l'étude et à la réalisation de cet estimateur Bayésien. Le formalisme introduit ainsi que les principales approches développées à ce jour s'appuyant sur une représentation en ondelettes du signal font l'objet de la Section 2. Ensuite, nous nous intéresserons plus particulièrement dans un contexte Bayésien, au modèle  $\alpha$ -stable (Sections 3). L'approximation par le modèle de mélange de gaussiennes ainsi que les solutions de tous les problèmes qui en découlent constituent le coeur de la Section et 4. Utilisant cet *a priori*, la section 5 se consacre à l'exposition de notre estimateur non paramétrique réalisé dans un contexte Bayésien. Enfin, dans la Section 6, nous présenterons les résultats de nos expérimentations avant de conclure et de donner quelques perspectives à ce travail.

## 2 Régression non-paramétrique

Le problème de la régression non-paramétrique peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$y_{mn} = g_{mn} + \epsilon_{mn} \quad (1)$$

où nos observations  $y_{mn}, m, n = 0, \dots, N - 1$  avec ( $N = 2^J$ ), représentant les valeurs réelles échantillonnées d'une image bruitée, sont modélisées comme la somme d'un signal  $g_{mn}$  à estimer et d'un bruit blanc Gaussien  $\epsilon_{mn}$  de moyenne zéro et de variance  $\sigma^2$ . L'objectif est de recouvrer l'information  $g$  contenue dans le signal bruité  $y$  sans pour autant faire d'hypothèses sur une structure paramétrique de  $g$ . Étant donné le vecteur  $\mathbf{y}$  qui représente les valeurs échantillonnées de  $y$ , la transformée en ondelettes de  $\mathbf{y}$  est donné par  $\mathbf{d} = \mathcal{W}\mathbf{y}$  où  $\mathcal{W}$  est une matrice orthogonale associée à la base orthonormée choisie, et  $\mathbf{d}$  un vecteur comprenant d'une part les coefficients d'approximation et d'autre part les coefficients de détail de la transformée en ondelettes discrète. Du fait du caractère orthogonal de la matrice  $\mathcal{W}$ , la transformée des ondelettes discrète inverse est donnée par  $\mathbf{y} = \mathcal{W}^T \mathbf{d}$ . Dans le cas où la taille  $N$  peut se mettre sous la forme  $N = 2^J$  avec  $J \in \mathbb{N}$ , la transformée en ondelettes discrète ainsi que sa transformée inverse peuvent être implémentées à l'aide de l'algorithme pyramidal proposé par Mallat [4] employant un banc de filtres miroir en quadrature. Dans le cas bidimensionnel, les sous-bandes  $HH_j, HL_j$  et  $LH_j, j = J_c, \dots, J - 1$  correspondent respectivement aux coefficients de détail d'orientation diagonale, horizontale et verticale. La sous-bande  $LL_{J_c}$  représente les coefficients d'approximations à l'échelle la plus grossière. En appliquant la transformée en ondelettes discrète (TOD) [4] à l'image bruitée  $y_{mn}$  nous obtenons alors à partir de l'Eq.1 :

$$\begin{aligned} c_{mn} &= a_{mn} + \epsilon_{mn}, \\ d_{mn}^o &= s_{mn}^o + \epsilon_{mn}, j = J_c, \dots, J - 1; m, n = 0, \dots, 2^j - 1 \end{aligned} \quad (2)$$

où nous notons  $a_{mn}$  (resp.  $c_{mn}$ ) le coefficient d'approximation de la TOD de l'image  $g$  (resp.  $y$ ) à la position  $(m, n)$  et  $s_{mn}^o$  (resp.  $d_{mn}^o$ ) le coefficient détail de la TOD de l'image  $g$  (resp.  $y$ ) à la position  $(m, n)$ , l'échelle  $j$  et l'orientation  $o$ . Du fait du caractère orthogonale de la transformée en ondelettes, les coefficients  $\epsilon_{mn}$  sont des variables aléatoires indépendantes  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  qui définissent un bruit blanc Gaussien.

Du fait du caractère creux de la transformée en ondelettes, nous pouvons supposer de façon intuitive que seuls quelques coefficients de détail  $s_{mn}^o$  ayant une valeur suffisamment élevée contribuent à l'image à recouvrer  $g$ , alors que les coefficients de faibles valeurs sont dus essentiellement au bruit qui contamine de façon uniforme tous les coefficients d'ondelettes. Il est également recommandé de conserver les coefficients d'approximation  $c_{mn}$ . Ces

derniers, relatifs aux composantes de basses fréquences, sont essentiellement caractéristiques du signal original. Le diagramme suivant représente le processus complet de débruitage du problème envisagé

$$\mathbf{y} \xrightarrow{\text{TOD}} \{c_{mn}, d_{mn}^{oj}\} \xrightarrow{\text{estimateur nonlineaire } \delta} \{c_{mn}, \delta(\hat{d}_{mn}^{oj})\} \xrightarrow{\text{TODI}} \hat{\mathbf{g}}$$

où  $\delta_\lambda$  est un estimateur non linéaire, e.g. seuillage dur ou seuillage doux, proposés par Donoho et Johnstone [1–3], reposant sur la conservation en intégralité des coefficients  $c_{mn}$  et sur une sélection judicieuse des coefficients  $d_{mn}^{oj}$ . Ces auteurs suggèrent l'extraction des coefficients de détail significatifs par comparaison de ces derniers avec un paramètre de seuillage  $\lambda > 0$ . Plusieurs méthodes ont été envisagées afin de trouver un compromis entre le seuillage dur et le seuillage mou [15, 23, 24]. Chacune des fonctions d'estimation citée précédemment est dépendante du choix du seuil  $\lambda$ . Il existe de nombreuses méthodes afin de déterminer la valeur du seuil. Ces différentes méthodes forment deux catégories distinctes : le seuillage global et le seuillage dépendant de l'échelle. Dans le premier cas, une unique valeur de  $\lambda > 0$  est appliquée à l'ensemble des coefficients d'ondelettes, alors que dans le second cas une valeur de  $\lambda > 0$  est définie pour chaque échelle de la décomposition.

Dans le cadre d'une approche Bayésienne, un modèle statistique *a priori* adapté à la classe des signaux à estimer est imposé aux coefficients d'ondelettes afin de modéliser les coefficients de détail. Le modèle  $\alpha$ -stable avec des queues de distribution relevées est adapté à la modélisation de ces coefficients de détail. Sa définition et sa caractérisation feront l'objet de la section suivante.

### 3 La distribution $\alpha$ -stable

**Définition 1** Une variable aléatoire  $X$  est appelée  $\alpha$ -stable s'il existe des paramètres  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $\sigma \geq 0$ ,  $-1 \leq \beta \leq 1$ , et  $\mu \in \mathbb{R}$  telles que sa fonction caractéristique s'écrive de la façon suivante : (formulation de Zolotarev [25])

$$\psi_X(t) = \exp(i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(t)W(\alpha, t))), t \in \mathbb{R} \quad (3)$$

où

$$W(\alpha, t) = \begin{cases} \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \log |t| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

et

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

où les quatre paramètres qui caractérisent une loi stable s'interprètent comme suit :

- L'exposant caractéristique  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 2$ . Il décrit la forme de la distribution ou son degré de "lepto-kurticité".
- Le paramètre d'asymétrie  $\beta$ ,  $\beta \in [-1, 1]$ . Si  $\beta = -1$ , on dit que la distribution est totalement asymétrique à gauche. Si  $\beta = 0$ , on dit que la distribution est symétrique. Si  $\beta = 1$ , la distribution est dite alors totalement asymétrique à droite.
- Le paramètre de position  $\mu$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ . Si  $\alpha > 1$ , ce paramètre est égal à la moyenne.
- Le paramètre d'échelle  $\sigma = \gamma^{\frac{1}{\alpha}}$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ . Si  $\alpha = 2$ , l'écart-type de la distribution est égal à  $\sqrt{2}\sigma$ .

**Notation**  $X \sim S_\alpha(\beta, \mu, \sigma)$  signifie que  $X$  est distribuée selon une loi stable de paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$  et  $\mu$

Du fait du caractère creux de la transformée en ondelettes, la plupart des coefficients de détails d'un signal analysé sont nuls et seuls quelques uns sont significatifs. Ainsi, la répartition de ces coefficients est caractérisée par une densité centrée en 0 avec des queues relevées. C'est exactement cette propriété qui est révélée par la densité de probabilité  $\alpha$ -stable symétrique ( $S_\alpha S$ ) où  $\beta = 0$  et  $\mu = 0$  (Fig.1).

### 4 Approximation analytique de la PDF $\alpha$ -stable

La fonction de densité de probabilité des variables aléatoires stables existe et est continue, mais à quelques exceptions près, aucune forme analytique n'est connue. En appliquant la transformée de Fourier inverse à la fonction caractéristique  $\psi_X(t)$  donnée par l'expression (3), on obtient une représentation intégrale de la PDF [26] :

$$f_{\alpha, \beta, \mu, \sigma} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\sigma^\alpha z^\alpha) \cos[(x - \mu)z + \beta z^\alpha \tan(\frac{\alpha\pi}{2})] dz & \text{if } \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\sigma^\alpha z^\alpha) \cos[(x - \mu)z + \beta z^\alpha \frac{2}{\pi} \log |z|] dz & \text{if } \alpha = 1 \end{cases} \quad (4)$$

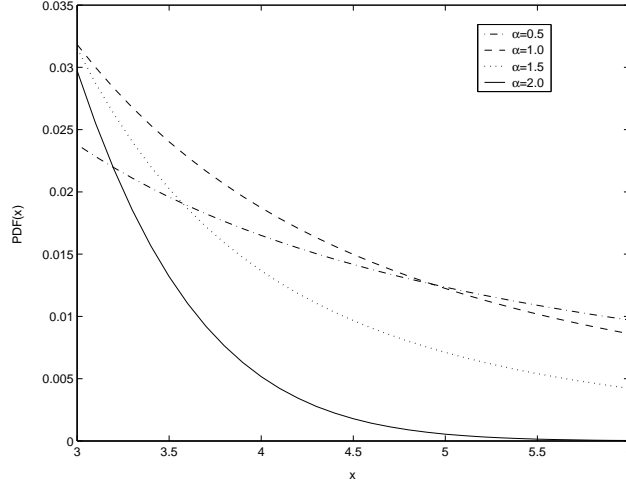


FIG. 1: Évolution de la queue de distribution avec le paramètre  $\alpha$ .

cette intégrale peut être évalué analytiquement seulement pour  $\alpha = 2$  (distribution Gaussienne),  $\alpha = 1$  (distribution de Cauchy) et pour  $\alpha = \frac{1}{2}$  (distribution de Lévy). Dans Nolan [26], l'auteur a prouvé l'existence d'une intégrale exacte équivalente à celle de l'Eq.4, où cette fois-ci, les bornes d'intégration sont finies. Cette approche exacte, bien que plus stable numériquement, reste très lente en calcul. Elle n'offre cependant pas d'expression analytique pour le débruiteur Bayésien. Elle sera néanmoins utilisée comme référence lors de nos comparaisons par la suite.

Nous présentons maintenant une méthode rapide et numériquement très stable, basée sur le modèle de mélange de gaussienne, pour obtenir l'expression analytique du PDF avec des valeurs de paramètres arbitraires.

#### 4.1 Modèle de Mélange de gaussiennes

La notion de mélange, donnée par le corollaire suivant, émane du fait qu'une *v.a.*  $\alpha$ -stables symétrique peut être représentée en fonction d'une *v.a.* gaussienne et d'une *v.a.*  $\alpha$ -stable [27].

##### Corollaire 1 (Corollaire du Théorème de mélange d'échelles)

Soit  $X$  une *v.a.* gaussienne  $X \sim \mathcal{N}(0, 2\sigma_x^2)$ . Il existe une *v.a.*  $\alpha$ -stable positive  $Y \sim S_{\frac{\alpha_z}{2}}(-1, 0, (\cos(\frac{\pi\alpha_z}{4}))^{\frac{2}{\alpha_z}})$  indépendante de  $X$ , telle que :

$$Z = Y^{\frac{1}{2}}X \sim S_{\alpha_z}(0, 0, \sigma_x) \quad (5)$$

Si on définit  $Z = Y^{\frac{1}{2}}X$ , la PDF de  $Z$  est déduite par la propriété de marginalisation des densités de probabilités :

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z|V}(z|v)f_V(v)dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2\gamma v^2}\right)f_V(v)v^{-1}dv \end{aligned} \quad (6)$$

où  $V = Y^{\frac{1}{2}}$  et  $f_v = h(v)$  représente la fonction de mélange. L'échantillonnage de  $f_Z(z)$  sur un ensemble de points fini  $N$  permet d'obtenir une approximation du modèle de mélange de gaussiennes pour la PDF

$$p_{\alpha,0,\mu,\sigma}(z) \approx \frac{\sum_{j=1}^N v_j^{-1} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma v_j^2}\right)h(v_j)}{\sqrt{2\pi\sigma} \sum_{j=1}^N h(v_j)} \quad (7)$$

cette expression analytique de la PDF  $S\alpha S$  est seulement une approximation, puisque l'intégrale continue a été approchée par une somme finie. Pour une bonne approximation, l'équation Eq.6 doit être échantillonnée sur un grand ensemble de points. Pour réduire la complexité du modèle dans Eq.7 nous employons un nombre restreint de composants et l'échantillonnage de Eq.6 se fait pour quelques points seulement. Dans ce cas, l'affinage de cette approximation brute, en utilisant l'algorithme "Espérance-Maximisation" (algorithme EM), permet d'obtenir une meilleure approximation.

## 4.2 Approximation des PDFs $S\alpha S$ par le modèle de mélange de gaussiennes

Le modèle de mélange de gaussiennes, retenu dans la section précédente, permet d'aboutir à une estimation de la PDF  $S\alpha S$ . Pour une bonne approximation, nous employons l'algorithme de mélange de gaussiennes présenté sous la forme suivante :

– **Étape 1 :**

Initialisation des paramètres de la distribution  $\alpha$ -stable :  $(\frac{\alpha}{2}, \beta = -1, \mu = 0, \sigma = (\cos(\frac{\pi\alpha}{4}))^{\frac{2}{\alpha}})$

La fonction caractéristique est donnée par :

$$\psi_Y(t) = \exp\left\{-\left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right)\right)^{\frac{2}{\alpha}} |t|^\alpha [1 + j \operatorname{sign}(t)W(t, \alpha)]\right\} \quad (8)$$

où

$$W(t, \alpha) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \log |t| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

et

$$\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

– **Étape 2 :**

Évaluer la PDF stable positive  $f_Y$  en  $N$  points en appliquant la transformée de Fourier rapide inverse à la fonction caractéristique  $\psi_Y(t)$  donnée par l'équation Eq.6, où  $N$  représente le nombre de gaussiennes.

– **Étape 3 :**

La PDF de la *v.a.*  $V = Y^{\frac{1}{2}}$ , dite fonction de mélange, est obtenue par :

$$h(v) = 2v f_Y(v^2) \quad (9)$$

– **Étape 4 :**

La substitution de la fonction de mélange, calculée dans l'étape (3), par l'équation Eq.7 permet d'obtenir l'approximation analytique de la PDF  $S\alpha S$  :

$$p_{\alpha,0,0,\sigma}(z) = \frac{\sum_{j=1}^N v_j^{-1} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma v_j^2}\right) f_Y(v_j^2)}{\sqrt{2\pi\sigma} \sum_{j=1}^N f_Y(v_j^2)} \quad (10)$$

– **Étape 5 :**

Affinage de l'approximation par l'algorithme EM.

## 4.3 Algorithme EM

Pour un mélange de gaussiennes, nous cherchons à estimer

$$p_{\alpha,0,0,\gamma}(z) = \sum_{j=1}^N P(z/j) P_j \quad (11)$$

où les  $P_j$  sont les propositions du mélange avec  $\sum_{j=1}^N P_j = 1$  et  $P(z/j)$  sont des PDFs normales.

Les variables cachées sont les sources d'un ensemble de  $M$  observations  $\{z_m\}$ . On fait une première estimation des paramètres  $P(z_m/j)$  et  $P_j$  et puis on alterne l'étape "Espérance" et l'étape "Maximisation" de l'algorithme EM.

L'algorithme est alors présenté sous la forme itérative suivante :

– Initialisation : Estimation des paramètres  $P(z_m/j)$  et  $P_j$

$$P(j) = \frac{h(v_j)}{\sum_{j=0}^N h(v_j)} \quad (12)$$

et

$$P(z_m/j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp\left(-\frac{z_m^2}{2\sigma_j^2}\right) \quad (13)$$

où

$$\sigma_j = \sqrt{2\gamma} v_j \quad (14)$$

– Itérer jusqu'à convergence :

**Étape E** : Faire une estimation des valeurs manquantes  $P(j/z_m)$

$$P_{new}(j/z_m) = \frac{P_{old}(z_m/j)P_{old}(j)}{\sum_m P_{old}(z_m/j)P_{old}(j)} \quad (15)$$

**Étape M** : Deux paramètres à estimer  $\sigma_j$  et  $P(j)$

$$\sigma_{new,j}^2 = \frac{\sum_m P_{old}(j/z_m)z_m^2}{\sum_m P_{old}(j/z_m)} \quad (16)$$

$$P_{new}(j) = \frac{1}{M} \sum_m P_{old}(j/z_m) \quad (17)$$

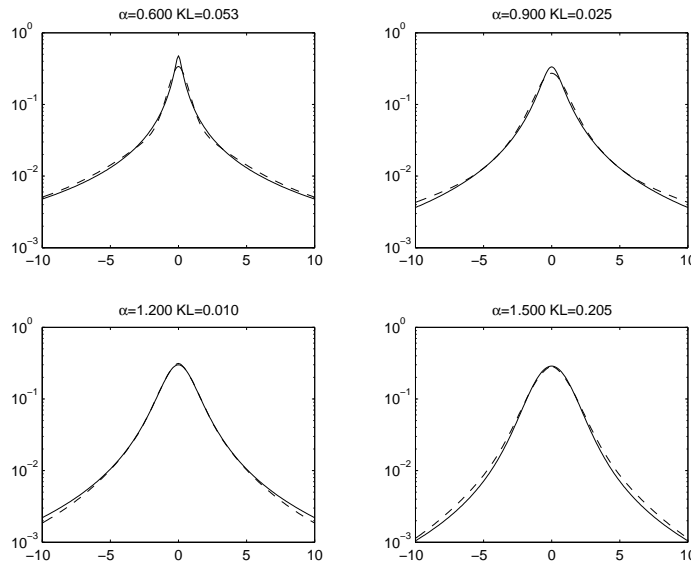


FIG. 2: Comparaison sur une échelle log-log de la PDF exacte, calculée à partir de l'Eq.4 (trait plein), et la PDF approchée par un mélange de 8 gaussiennes (- -) pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$ . La pseudo-distance de "Kullback-Leibler" (KL) entre les deux PDFs est notée au dessus de chaque graphe.

Nous constatons, suite à l'observation des courbes dans la Fig.2, que la PDF de mélange de gaussiennes est très proche de la PDF exacte évaluée à partir de l'Eq.4 pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$ . Ceci est confirmé par les pseudo-distances de "Kullback-Leibler" (KL) calculées entre les deux PDFs, pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$ .

Bien que l'approximation que nous proposons soit assez bonne et très stable, il reste toutefois à définir le nombre de composantes  $N$  dans le mélange de gaussiennes. Deux techniques ont été développées, permettant d'estimer le nombre de gaussiennes optimal  $N$  :

- le critère *MDL* (*minimum description length*) : L'estimation du nombre de gaussiennes optimal est défini par le minimum de la fonction de coût  $C_{MDL}$  [28]. La Fig3 montre l'évolution du critère *MDL* en fonction de  $N$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ . Hormis le cas  $\alpha = 2$  (cas Gaussien), on constate que le nombre de gaussiennes optimal, qui est le minimum du *MDL*, se situe dans l'intervalle [4, 8]. Pour une meilleure approximation, le choix de  $N \in [4, 8]$  nous paraît suffisant. De plus, ce choix nous a été confirmé par un autre critère que nous présentons maintenant.
- Cette autre alternative consiste à effectuer des simulations "Monte-Carlo" et à mesurer les différences entre les PDFs approchées et les PDFs exactes pour chaque valeur de  $N$ . Nous avons adopté la divergence de "Kullback-Leibler" (KL) comme mesure d'écartement entre les PDFs exactes et approchées. La Fig.4 indique l'évolution de la distance KL en fonction de  $N$ . On peut clairement constater que cette distance converge vers 0 très rapidement à partir de  $N = 8$ .

Ces différents critères plaident en faveur d'une valeur de  $N = 8$  pour assurer un compromis entre la complexité du modèle assurant une très bonne qualité de l'approximation et un temps de calcul raisonnable.

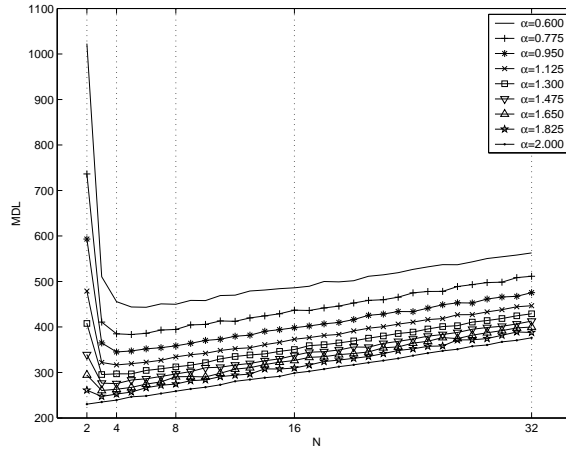


FIG. 3: Évolution du critère  $MDL$  en fonction du nombre de gaussiennes  $N$  pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$ .

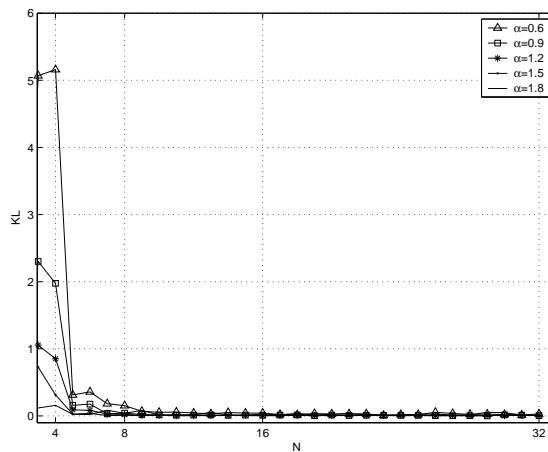


FIG. 4: Évolution de la distance de "Kullback-Leibler" (KL), calculée entre la PDF exacte et la PDF approchée par un mélange de gaussiennes, en fonction du nombre de gaussiennes pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$ .

## 5 Débruiteur Bayésien

### 5.1 La PDF marginale des coefficients d'ondelettes

Dans l'approche Bayésienne, l'information *a priori* est imposée aux coefficients d'ondelettes pour décrire leur distribution. On suppose dans le modèle d'estimation donné sous la forme suivante

$$d = s + \epsilon \quad (18)$$

que les coefficients de l'observation  $d$  à chaque échelle et orientation, et du signal à estimer  $s$  sont des *v.a. iid* et indépendantes du bruit blanc gaussien  $\epsilon$ . Les coefficients de détail à chaque échelle et à chaque orientation du signal à estimer  $s$  suivent une distribution  $\alpha$ -stable

$$s \sim S_\alpha(0, 0, \gamma = \sigma^\alpha) \quad (19)$$

et le modèle probabiliste associé à  $d$  sachant  $s$  est gaussien :

$$d/s \sim \mathcal{N}(0, \sigma_B^2) \quad (20)$$

Une fois les coefficients d'ondelettes de l'observation  $d$  sont déterminés, nous cherchons la distribution *a posteriori* de  $s$ . Par conséquent, la PDF marginale de  $d$  s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} p(d|\theta; H) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(d|s, \theta_2; H)p(s|\theta_1; H)ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(d; \theta_2)p(s|\theta_1; H)ds \end{aligned} \quad (21)$$

où  $H$  est l'ensemble d'hypothèses sur le modèle d'observation, les connaissances *a priori* sur le signal à estimer  $s$  et sur le bruit  $\epsilon$ .  $p(s|\theta_1; H)$  est la PDF de mélange de gaussiennes donnée par l'Eq.11 avec l'ensemble de paramètres  $\theta_1 = \{P(j), \sigma_j\}$  et  $\phi(d; \theta_2)$  est la PDF normale avec l'écart-type  $\sigma_B$  où  $\theta_2 = \{\sigma_B^2\}$ . L'approximation analytique de la PDF marginale est alors donnée par

$$p(d|\theta; H) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_j P(j) (\sigma_j^2 + \sigma_B^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{d^2}{2(\sigma_j^2 + \sigma_B^2)}\right) \quad (22)$$

## 5.2 Estimation des hyperparamètres

Dans le contexte de débruitage des images, les hyperparamètres sont estimés à partir des coefficients d'ondelettes observés à chaque orientation et à chaque échelle. Pour mettre en application la formule de l'Eq.22, on doit alors estimer les hyperparamètres  $\theta$  où

$$\theta = (\theta_1, \theta_2) = \{P(j), \sigma_j, \sigma_B\} \quad (23)$$

qui, à leur tour, mèneront à une procédure de débruitage adaptatif à chaque sous-bande. L'étape d'estimation de ces hyperparamètres est cruciale. Il est clair que celle-ci conditionne les performances finales de l'algorithme de débruitage.

Dans le cadre du modèle de mélange d'échelle de gaussiennes, l'estimation des paramètres  $P(j)$  et  $\sigma_j$  dépend des paramètres arbitraires  $\alpha$  et  $\gamma$  (voir l'Eq.12-14). Si cette estimation reste accessible en absence de bruit, elle devient beaucoup plus délicate en sa présence.

Pour une distribution  $\alpha$ -stable, et au l'absence du bruit, il existe diverses méthodes permettant d'estimer ces paramètres. On peut les classer suivant les catégories suivantes :

- Le maximum de vraisemblance : aucune forme analytique n'est disponible pour cet estimateur et on a recours à des procédures de minimisation numérique extrêmement pénibles et coûteuses [26]. Ces inconvénients majeurs rendent cette possibilité inutile en pratique.
- Méthodes des quantiles : Fama et Roll [29] ont proposé une méthode basée sur les quantiles des échantillons empiriques. Elle n'est valide que pour les distributions symétriques et souffre d'un biais asymptotique élevé. McCulloch [30] a développé une technique d'estimation sans biais, dérivée de celle de Fama-Roll, permettant une estimation rapide des paramètres  $\alpha$  et  $\gamma$  sous la restriction  $0.6 \leq \alpha \leq 2$ .
- Méthodes basées sur la fonction caractéristique : Une approximation empirique de la fonction caractéristique peut être employée pour estimer les paramètres de la distribution  $\alpha$ -stable pour un échantillon donné [31,32].
- Méthodes des moments fractionnaires : Ma et Nikias [33] ont proposé une classe d'estimateurs basée sur les moments fractionnaires d'ordre faible ( $< \alpha$ ). Aussi, Tsihrintzis et Nikias [34] ont proposé une technique d'estimation basée sur les moments d'ordre extrême. Cependant, ces estimateurs souffrent de sérieuses limitations (biais important) à faible nombre d'échantillons.
- Méthodes basées sur le comportement asymptotique des queues : celles-ci sont fondées sur la décroissance géométrique des distributions  $\alpha$ -stable lorsque  $|x| \rightarrow +\infty$ . De nombreuses difficultés s'opposent à l'implémentation de cette méthode. Citons par exemple la plage des  $x$  suffisamment grands (infinis!) que l'on doit utiliser.

Dans Mathieu [21], Bates [35] et Weron [36], ces méthodes ont été testées à l'aide de simulations numériques. Les méthodes des quantiles et celles basées sur la fonction caractéristique présentent des performances similaires et s'avèrent supérieures en pratique aux méthodes des moments fractionnaires.

Dans le contexte du débruitage, les observations dont on dispose sont corrompues par un bruit blanc gaussien. Il s'en suit une difficulté majeur lors de l'estimation des hyperparamètres de la loi *a priori*. L'estimation des paramètres  $\alpha$  et  $\gamma$ , dans le cas de notre modèle, ne sert que d'initialisation. Nous avons alors, suite aux discussions précédentes, choisi l'estimateur basé sur les quantiles de McCulloch partant du fait qu'à *RSB* raisonnable, les queues de la distribution marginale des coefficients d'ondelettes observés sont peu influencées par la présence du bruit.

La méthode McCulloch permet une estimation initiale et rapide des paramètres  $\alpha$  et  $\gamma$  sous la restriction  $0.6 \leq \alpha \leq 2$ , or en déduit alors le paramètre  $v_j$  donné par l'Eq.9, qui à son tour nous permet l'initialisation des paramètres  $P(j)$  et  $\sigma_j$  en appliquant les Eq.12 et 14.

Par ailleurs, le niveau de bruit  $\sigma_B$  est estimé à partir de l'orientation *HH* de l'échelle la plus fine en utilisant l'estimateur robuste de Donoho & Johnstone [1].

$$\hat{\sigma}_B = \frac{\text{median}(d_{mn}^{HH_1})}{0.6745} \quad (24)$$

Le choix de l'échelle la plus fine repose sur l'hypothèse que les coefficients d'ondelettes correspondants sont en grande majorité dus au bruit blanc.



### 5.3 L'espérance conditionnelle *a posteriori*

Dans le cadre Bayésien, nous appliquons la règle de Bayes pour combiner l'information contenue dans les données et celle obtenue dans la loi *a priori* afin de calculer la loi de probabilité *a posteriori*. L'espérance conditionnelle *a posteriori* (ECP) des coefficients d'ondelettes  $s$ , conditionnellement sur l'ensemble de hyperparamètres  $\theta$ , est donné par :

$$\begin{aligned} s_{ECP}(d|\theta) &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} s p(d|s, \theta_2; H)p(s|\theta_1; H)ds}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(d|s, \theta_2; H)p(s|\theta_1; H)ds} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} s p(d|s, \theta_2; H)p(s|\theta_1; H)ds}{p(d|\theta; H)} \end{aligned} \quad (25)$$

La forme analytique de l'estimateur ECP est donné par l'expression suivante,

$$s_{ECP}(d|\theta) = \frac{\sum_j P(j) \frac{d \sigma_j^2}{\sigma_j^2 + \sigma_B^2} \phi(d; \sigma_j^2 + \sigma_B^2)}{\sum_j P(j) \phi(d; \sigma_j^2 + \sigma_B^2)} \quad (26)$$

La Fig.5 montre l'évolution de la fonction d'entrée-sortie de notre estimateur Bayésien (ECP). Les 4 premiers (resp. derniers) graphes montrent l'influence du rapport  $\frac{\sigma}{\sigma_B}$  (resp. du paramètre  $\alpha$ ) sur les courbes du taux de rétrécissement (Shrinkage), réalisé dans le cadre de notre approche, en fonction du paramètre  $\alpha \in [0.6, 2]$  (resp. du rapport  $\frac{\sigma}{\sigma_B}$ ) où le rapport  $\frac{\sigma}{\sigma_B}$  peut être vu comme une forme de mesure du *RSB*. Nous constatons que le taux de rétrécissement (Shrinkage) diminue d'autant plus que le rapport  $\frac{\sigma}{\sigma_B}$  augmente. Intuitivement cela peut aisément s'expliquer par le fait que la contribution du signal est d'autant plus grande que le rapport  $\frac{\sigma}{\sigma_B}$  est important.

De plus, nous constatons que le taux de rétrécissement (Shrinkage) effectué diminue quand  $\alpha$  diminue. Cela peut aussi aisément se comprendre en considérant le fait que plus la valeur de  $\alpha$  est faible et plus la queue de la distribution *a priori* est importante, d'où une plus grande probabilité qu'une grande valeur mesurée (située en queue de distribution) soit due à la présence de signal.

Enfin, nous allons présenter dans la section suivante les résultats obtenus au moyen de cet estimateur Bayésien.

## 6 Expérimentation et résultats

Nous évaluons maintenant les performances de notre débruiteur Bayésien, dénoté dans la suite "α-stable mixture", en le comparant à diverses méthodes de débruitage développées dans un contexte Bayésien et classique. Six algorithmes de débruitage sont considérés : les seuillages universels dur et mou [1], l'estimateur SURE basé sur l'estimation du risque sans biais de Stein [2], l'estimateur VISU (Oracle Threshold) [37], le débruiteur Bayésien BKF [22] et une version d'un débruiteur Bayésien avec un *a priori* α-stable développé dans [21]. Aucune forme analytique n'étant disponible pour ce dernier, celui-ci était basé sur l'implémentation numérique des intégrales de Fourier à base de FFT [38], car les intégrations numériques directes posent de sérieuses difficultés, telles que des bornes infinies, qui les rendent très lentes et numériquement instables.

Afin de quantifier les performances de ces différents estimateurs, nous avons employé le rapport Signal sur Risque (RSR).

Ce rapport est défini en décibel comme suit :

$$RSR_{out} = 10 \log_{10} \frac{\sum_{mn} \hat{g}_{mn}^2}{\sum_{mn} (\hat{g}_{mn}^2 - g_{mn}^2)^2} \quad (27)$$

où  $\hat{g}$  est l'estimée de  $g$ .

Les figures ci-dessous présentent les performances obtenues pour des images de test d'une base de 100 images digitalisées [39]. Nous avons utilisé l'Ondelette à support compact de Daubechies de régularité 4. L'échelle la plus grossière de la décomposition est choisie pour être  $\log_2 \log N + 1$  à partir des considérations asymptotiques [15] où  $N$  est la taille de l'image bruitée.

La Fig.6 montre les images résultantes, pour chaque méthode de débruitage, pour l'image de Lenna avec un *RSB* = 15dB en entrée. On voit que la qualité visuelle du débruiteur Bayésien "α-stable mixture" est supérieure aux autres méthodes de débruitage, mais reste comparable au BKF. Ce comportement a tendance à se reproduire pour les autres images tests (Barbara et Bateau). Le zoom sur une région texturée du pantalon montre que débruiteur que nous proposons réalise un excellent compromis entre le rejet du bruit et la conservation des détails fins de l'image (e.g. les rayures du pantalon). Notre débruiteur affiche des performances bien au delà de ce que peut offrir le débruiteur Bayésien α-stable dans sa version numérique dite "exacte" développée dans [14, 21].

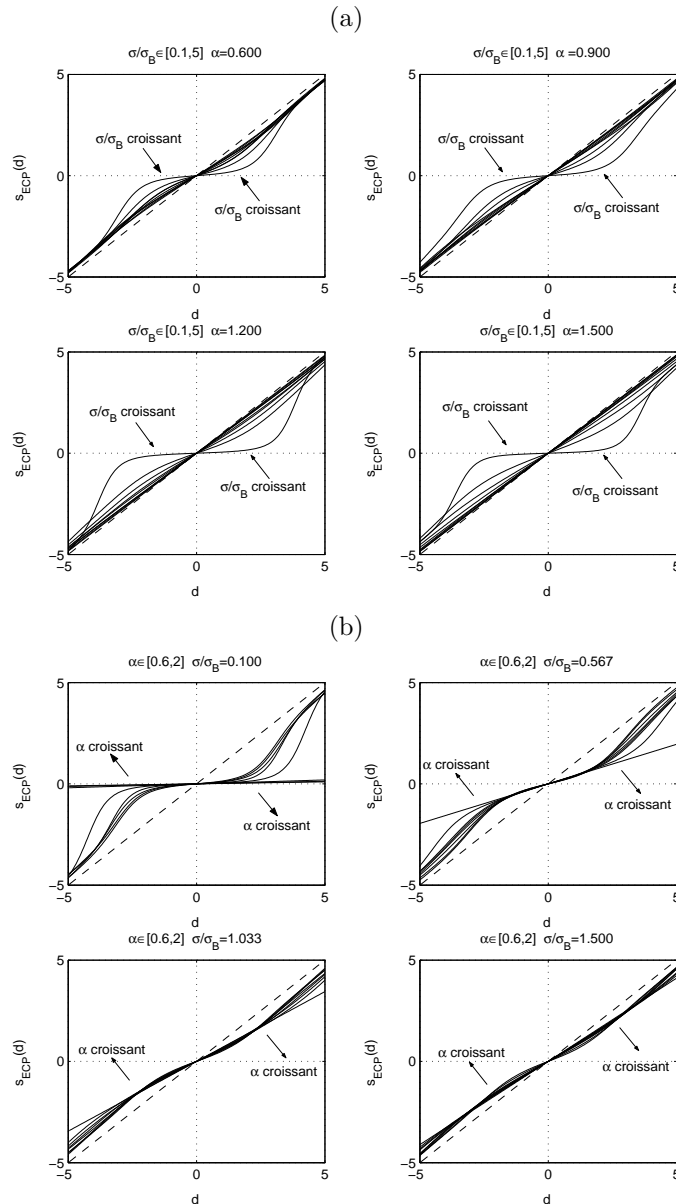


FIG. 5: Évolution de la fonction d'entrée-sortie de notre estimateur Bayésien de mélange de gaussiennes (ECP). (a) en fonction du rapport  $\frac{\sigma}{\sigma_B}$ . (b) en fonction du paramètre  $\alpha$

La moyenne et l'écart-type (sur 50 simulations) du  $RSR_{out}$ , donnés par les diverses méthodes pour l'image de Lenna, sont comparés dans la Fig7. Les  $RSR_{out}$  ont été calculés pour chaque valeur d'entrée du  $RSB$  dans la gamme de  $[5, 20]dB$ . On constate que le débruiteur " $\alpha$ -stable mixture" dépasse les autres débruiteurs et est meilleur que le BKF pour les bas  $RSB$ . L'estimateur [21] affiche des performances médiocres pour les bas  $RSB$  à cause de la faiblesse de l'estimateur des hyperparamètres [21]. Dans la Fig.7, on constate que l'estimateur VISU (Oracle Threshold) s'avère d'autant plus performant comparé à l'estimateur SURE et aux seuillages universels que le rapport  $RSB$  est important. Pour l'image de Barbara, on constate que les débruiteurs " $\alpha$ -stable mixture" et le BKF dépassent les autres débruiteurs et affichent des performances similaires. De plus, on constate que l'estimateur [21] s'avère le moins performant comparé aux autres débruiteurs pour les bas  $RSB$ , et ce toujours à cause de la faiblesse de son estimateur des hyperparamètres.

Dans la Fig.8, on compare les  $RSR_{out}$  moyennés sur les 50 simulations et les 100 images de la base, de toutes les méthodes de débruitage. Le comportement général décrit avant est confirmé par ce graphe. Ceci suggère que le " $\alpha$ -stable mixture" soit en effet un modèle approprié pour capturer le comportement parcimonieux des coefficients d'ondelettes pour une grande classe d'images.

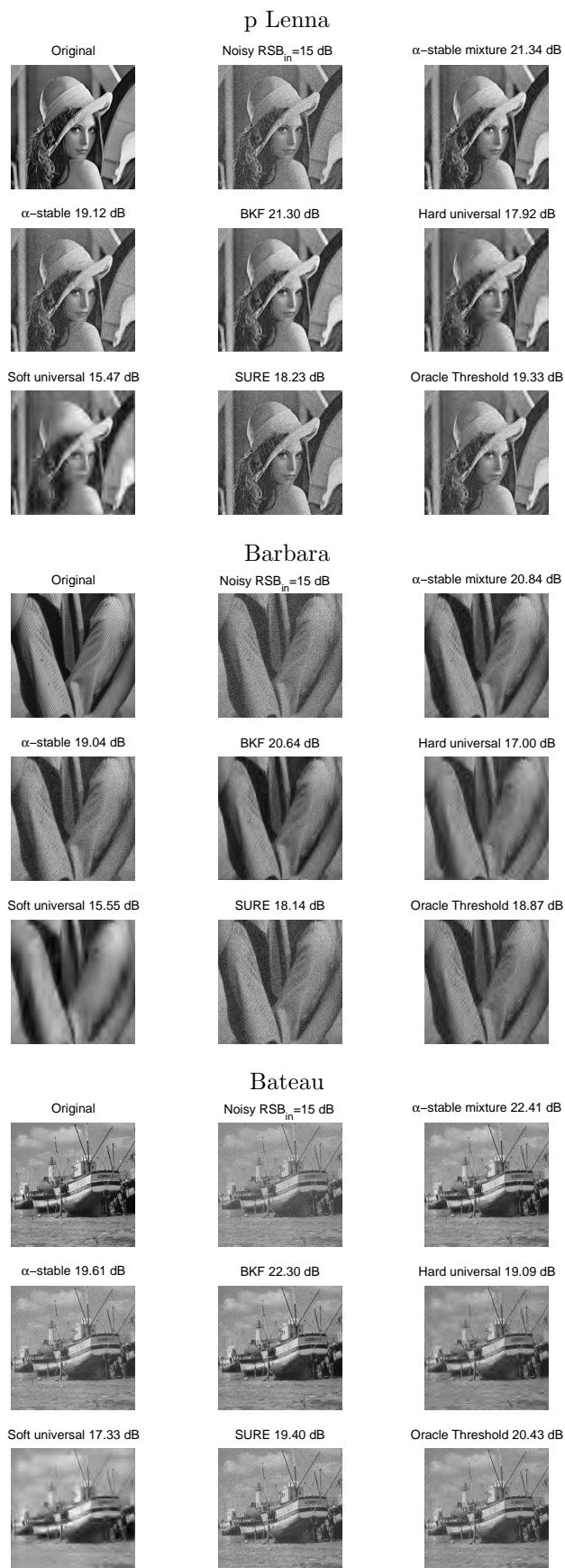


FIG. 6: Comparaison des différents débruiteurs sur trois images tests : Lenna, Barbara et Bateau. Ces images ont été corrompues par un bruit additif gaussien ( $RSB = 15dB$  en entrée). L'image de Barbara a été zoomée sur une région texturée du pantalon. Le débruiteur Bayésien  $\alpha$ -stable mixture est nettement supérieur aux autres méthodes de débruitage, mais reste comparable au débruiteur Bayésien BKF.

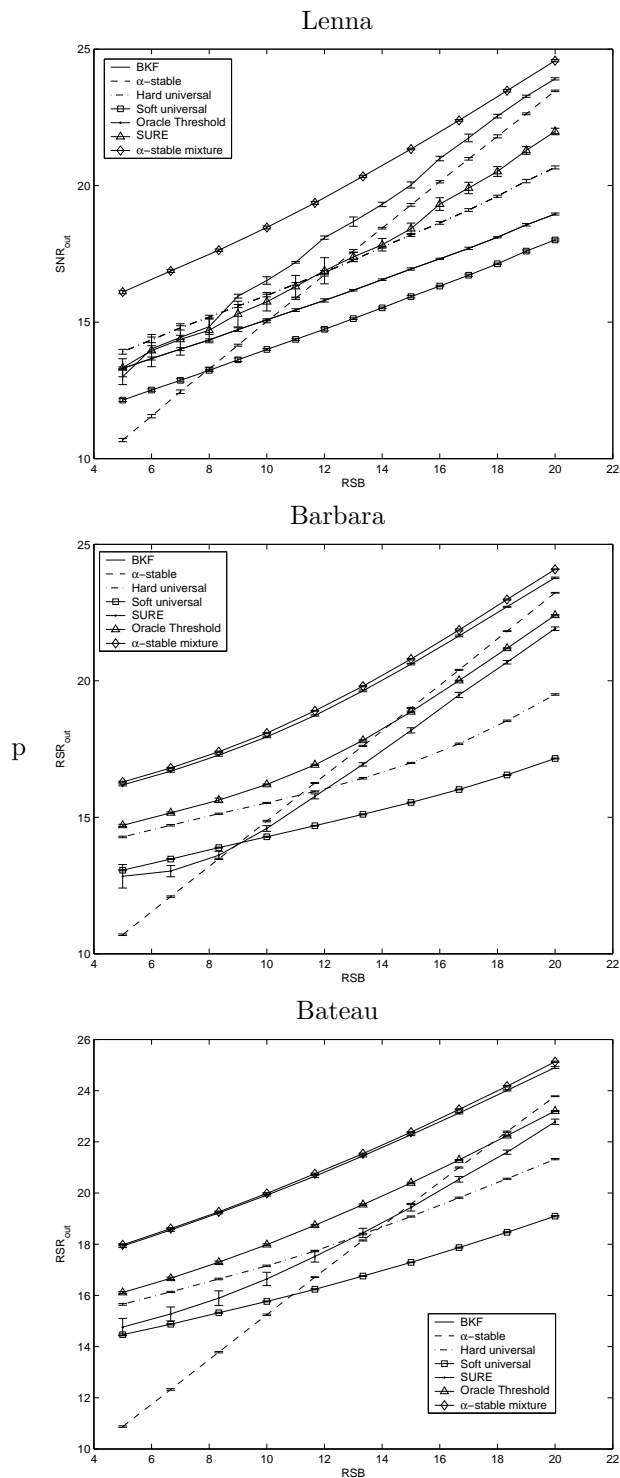


FIG. 7: Comparaison des différents estimateurs de débruitage pour trois images de test : Lenna, Barbara et Bateau.

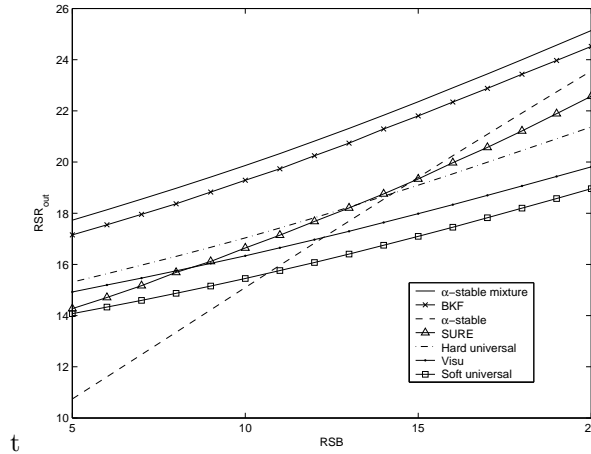


FIG. 8: Comparaison des différents estimateurs de débruitage pour une base de 100 images.

## 7 Conclusion

Dans cet article, un nouvel estimateur Bayésien non linéaire non paramétrique, formulé dans le cadre de la décomposition multi-échelles, a été présenté. Nous avons proposé un modèle statistique *a priori* adapté à la classe des signaux à estimer. Il s'agit du modèle  $\alpha$ -stable avec des queues de distribution relevées adapté à la modélisation des coefficients d'ondelettes. Aussi et en utilisant le modèle de mélange de gaussiennes, nous avons proposé une méthode rapide et numériquement très stable pour obtenir une expression analytique pour la classe des PDFs  $S\alpha S$ .

En utilisant cette expression analytique pour la distribution marginale *a posteriori*, les résultats expérimentaux ont montré que les performances de notre débruiteur " $\alpha$ -stable mixture" s'avèrent supérieures à celles des débruiteurs développés dans un contexte Bayésien et classique pour une grande classe d'images. Cette performance reste liée à la qualité de l'estimateur des hyperparamètres.

Enfin, il reste un aspect qui doit être étudié pour améliorer la performance de notre débruiteur. Il s'agit de l'introduction de l'information géométrique. Plusieurs directions font l'objet d'investigations en cours. Il s'agit tout d'abord de la prise en compte de l'information de dépendance contextuelle via les champs aléatoires de Markov, inspirés par des approches telles que celles développés dans [6, 40, 41]. Nous sommes aussi en train d'examiner les possibilités offertes par des transformées multi-échelles prenant explicitement en compte l'information géométrique lors de leur construction, e.g. les curvelets [42], les bandelets [43]. Dans ce cadre, nous visons à proposer un cadre statistique Bayésien permettant de modéliser la distribution *a priori* des coefficients de telles transformations et de prendre en compte leurs dépendances inter et intra-échelle.

## Références

- [1] D. L. Donoho, I. M. Johnstone, *Biometrika* **81**, 425 (1994).
- [2] D. L. Donoho, I. M. Johnstone, *Journal of the American Statistical Association* **90**, 1200 (1995).
- [3] D. L. Donoho, I. M. Johnstone, G. Kerkycharian, D. Picard, *J. R. Statist. Soc. B.* **57**, 301 (1995).
- [4] S. G. Mallat, *IEEE trans. PAMI* **11**, 674 (1989).
- [5] G. P. Nason, *Journal of the Royal Statistical Society B* **58**, 463 (1996).
- [6] M. Malfait, D. Roose, *IEEE Trans. Image Processing* **6**, 549 (1997).
- [7] B. Vidakovic, *Statistical Modeling by Wavelets* (John Wiley & Sons, New York, 1999).
- [8] D. B. Percival, A. T. Walden, *Wavelet Methods for Time Series Analysis* (Cambridge press, 2000).
- [9] T. T. Cai, B. W. Silverman, Technical report, Department of Statistics, Purdue University, USA (unpublished).
- [10] S. Efromovich, *Statist. Proba. Lett.* **49**, 323 (2000).
- [11] M. Clyde, E. George, *J. R. Statist. Soc. B* **62**, 681 (2000).
- [12] S. Chang, B. Yu, M. Vetterli, *IEEE Transactions on Image Processing* **9**, 1522 (2000).
- [13] S. Chang, B. Yu, M. Vetterli, *IEEE Trans. Image Processing* **9**, 1532 (2000).
- [14] A. Achim, A. Bezerianos, P. Tsakalides, *IEEE Trans. Med. Imag.* **20**, 772 (2001).
- [15] A. Antoniadis, J. Bigot, T. Sapatinas, *Journal of Statistical Software* **6**, (2001).
- [16] H. Chipman, E. Kolaczyk, R. McCulloch, *J. Am. Statist. Ass.* **92**, 1413 (1997).
- [17] M. Clyde, G. Parmigiani, B. Vidakovic, *Biometrika* **85**, 391 (1998).
- [18] F. Abramovich, T. Sapatinas, B. Silverman, *J. R. Statist. Soc. B* **60**, 725 (1998).
- [19] B. Vidakovic, F. Ruggeri, Technical report, Institute of Statistics and Decision Sciences, Duke University (unpublished).

- [20] C. L. Nikias, M. Shao, *Signal Processing with Alpha-Stable Distributions and Applications* (Wiley-Interscience, 1995).
- [21] J. Mathieu, Master's thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieur, Caen, 2002.
- [22] J. Fadili, L. Boubchir, D. Bloyet, IEEE Trans. Image Processing (2003 (soumis)).
- [23] H. Y. Gao, A. G. Bruce, *Static. Sinica* **7**, 855 (1997).
- [24] H. ye Gao, *Journal of Computational and Graphical Statistics* **7**, 469 (1998).
- [25] V. M. Zolotarev, *One-dimensional Stable Distribution* (Amer. Math. Soc. Transl. of Math. Monographs, Vol. 65. Amer. Math. Soc., Providence, RI. (Transl. of the original 1983 Russian, 1986).
- [26] J. P. Nolan, *Statist. -Stochastic Models* **13**, 759 (1997).
- [27] E. E. Kuruoglu, Master's thesis, Signal Processing and Communications Laboratory - Department of Engineering, University of Cambridge, 1998.
- [28] M. A. T. Figueiredo, J. M. N. Leitao, A. K. Jain, dans *Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition* (1999), pp. 54–69.
- [29] E. F. Fama, R. Roll, *Journal of the American Statistical Association* **66(334)**, 331 (June 1971).
- [30] J. H. McCulloch, *Communication on Statistics-Simulation* **15(4)**, 1109 (1986).
- [31] I. A. Koutrouvelis, *Journal of the American Statistical Association* **75(372)**, 918 (December 1980).
- [32] S. Kogon, D. Williams, In *Proceedings of the 29th Asilomar Conference of Signals, Systems and Computing* (1995).
- [33] X. Ma, C. L. Nikias, *IEEE Transaction on Signal Processing* **43(12)**, 2884 (December 1995).
- [34] G. A. Tsihrintzis, C. L. Nikias, *IEEE Transaction on Signal Processing* **44(6)**, 1492 (June 1996).
- [35] S. Bates, S. McLaughlin, *IEEE Transaction on Signal Processing* **48**, 865 (March 2000).
- [36] R. Weron, Technical report, HSC/95/1, Wroclaw University of Technology (unpublished).
- [37] S. Chang, B. Yu, M. Vetterli, *IEEE Trans. Image Processing* **9**, 1532 (2000).
- [38] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [39] .
- [40] M. Crouse, R. Nowak, R. Baraniuk, *IEEE Transactions on Signal Processing* **46**, 886 (1998).
- [41] J. Romberg, H. Choi, R. Baraniuk, *IEEE Transactions on Image Processing* **10**, 1056 (2001).
- [42] J. L. Starck, H. Choi, D. L. Donoho, *IEEE Transactions on Image Processing* **11**, 670 (2000).
- [43] E. L. Pennec, thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, Paris, 2002.